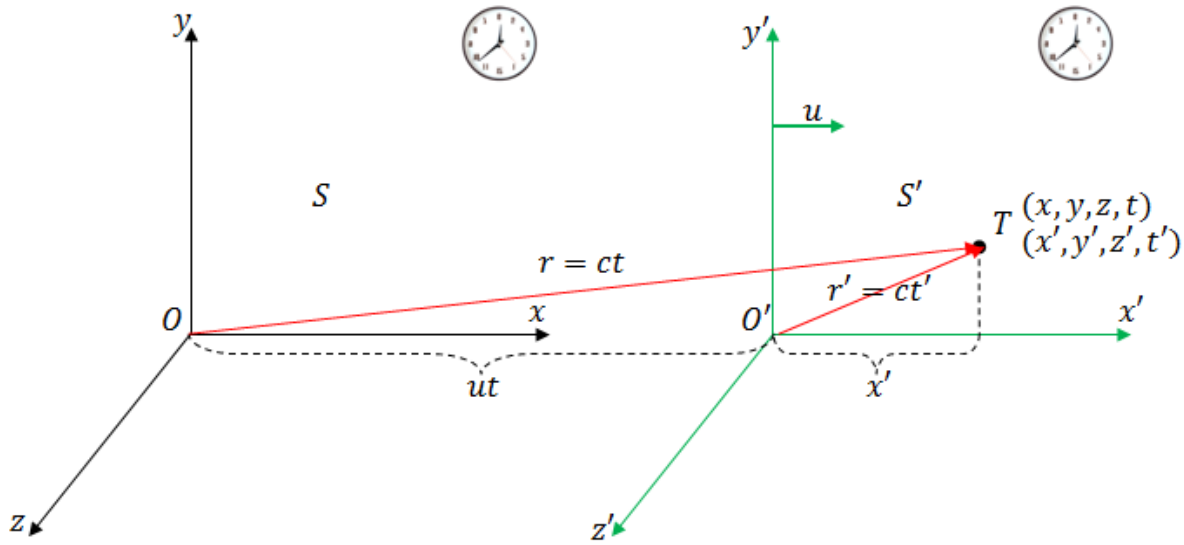
Лоренцове трансформације

Класични закон сабирања брзина, као ни Галилејеве трансформације координата положаја времена, као што смо установили, нису у сагласности са другим постулатом специјалне теорије релативности. Због тога је Ајнштајн искористио тзв. Лоренцове трансформације.

Посматрајмо два инерцијална система S и S', при чему је систем S у стању релативног мировања, док се систем S' креће константном брзином u дуж x- осе у односу на систем S. У почетном тренутку $t = t' = 0$ координатни почеци O и O' се поклапају.



У почетном тренутку $t = t' = 0$ из заједничког координатног почетка емитује се сферни свјетлосни талас. Након времена t, тај сигнал доспијева у тачку T на удаљености $r = ct$ од координатног почетка система S. Посматрач у систему S' региструје да је свјетлосни сигнал доспио у ту тачку након времена t'. Пошто је брзина свјетлости једнака у свим инерцијалним системима, вриједи:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \quad \text{и} \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2$$

Да би се одредила веза између просторних и временске координате једног и другог референтног система, треба водити рачуна о условима:

- сваком догађају у систему S одговара тачно један догађај у систему S';

- оба инерцијална система су потпуно равноправна;

- ако се тијело креће равномјерно праволинијски у једном систему, исто тако се креће и у другом систему;

- за брзине доста мање од брзине свјетлости ($u \ll c$), Лоренцове трансформације прелазе у Галилејеве.

Да би ови услови били задовољени, веза између координата положаја и времена мора бити линеарна:

$$x' = kx + bt$$

гдје k и b не смију зависити од координата положаја и времена.

Координатни почетак O' система S' у систему S' има координату $x' = 0$, а у систему S $x = ut$. Ако то уврстимо у претходну формулу, добићемо:

$$0 = kut + bt$$

$$b = -ku$$

па ако то уврстимо у прву формулу, добићемо:

$$x' = k(x - ut)$$

Пошто су инерцијални референтни системи еквивалентни, мора важити и:

$$x = k(x' + ut')$$

Свјетлосни сигнал у систему S за вријеме t пређе дуж x- осе пут $x = ct$. Посматрач у систему S' је измјерио да је прошло вријеме t', док је у том систему дуж x'- осе свјетлосни сигнал у положају $x' = ct'$. Ако то искористимо у претходне двије формуле добићемо:

$$ct' = kt(c - u) \quad \text{и} \quad ct = kt'(c + u)$$

Множењем ове двије формуле међусобно, добићемо:

$$c^2 = k^2(c^2 - u^2)$$

$$k = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

а пошто се у граничном случају морају добити Галилејеве трансформације, узимамо само позитиван предзнак. Увршћавањем израза за k у почетне једначине за координате x и x' добићемо:

$$x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Комбинацијом ове двије формуле, добијају се Лоренцове трансформације за вријеме:

$$t = \frac{t' + \frac{ux'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad t' = \frac{t - \frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Пошто се систем S' креће у правцу x- осе, координате y и z су исте у оба система:

$$y = y', \quad z = z'$$

Ради лакшег записивања Лоренцових трансформација користи се Лоренцов фактор:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Галилејеве трансформације	**Лоренцове трансформације**
$x = x' + ut',\ y = y',\ z = z',\ t = t'$	$x = \gamma(x' + ut'),\ y = y',\ z = z',\ t = \gamma(t' + \frac{ux'}{c^2})$
$x' = x - ut,\ y' = y,\ z' = z,\ t' = t$	$x' = \gamma(x - ut),\ y' = y,\ z' = z,\ t' = \gamma(t - \frac{ux}{c^2})$

Ако је брзина система доста мања од брзине свјетлости $u \ll c$, тада је $\frac{u^2}{c^2} \approx 0$, па је $\gamma = 1$. Самим тим се Лоренцове трансформације своде на Галилејеве.

Такође, израз испод коријена мора бити ненагативан:

$$1 - \frac{u^2}{c^2} \geq 0$$

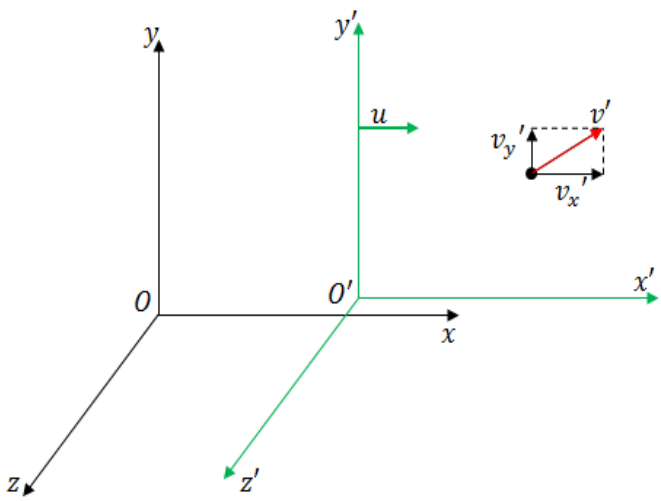
$$\frac{u^2}{c^2} \leq 1$$

$$u \leq c$$

Дакле, брзина свјетлости у вакууму је највећа могућа брзина у природи, што је један од постулата специјалне теорије релативности.

- Релативистичко слагање брзина

На основу Лоренцових трансформација, изводи се Ајнштајнова формула за слагање брзина:



Нека честица има брзину v' у односу на систем S'. За бесконачно мало вријеме $\Delta t'$ у систему S' честица направи помјерај $\overrightarrow{\Delta r'}$. При томе су компоненте брзине:

$$v_x' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}, \quad v_y' = \frac{\Delta y'}{\Delta t'}, \quad v_z' = \frac{\Delta z'}{\Delta t'}$$

гдје су $\Delta x'$, $\Delta y'$ и $\Delta z'$ помјераји дуж оса x', y' и z' за вријеме $\Delta t'$. Ако у референтном систему S овоме одговара временски интервал Δt, при чему су помјераји дуж оса x, y и z редом: Δx, Δy и Δz, такође важи:

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t}, \quad v_z = \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

Искористимо сада Лоренцове трансформације да изведемо везе између компоненти брзина у ова два система:

$$v_x = \frac{\gamma(\Delta x' + u\Delta t') \quad /:\Delta t'}{\gamma(\Delta t' + \frac{u\Delta x'}{c^2}) \quad /:\Delta t'} = \frac{\frac{\Delta x'}{\Delta t'} + u}{1 + \frac{u}{c^2}\frac{\Delta x'}{\Delta t'}} \quad \Longrightarrow \quad v_x = \frac{v_x' + u}{1 + \frac{uv_x'}{c^2}}$$

$$v_y = \frac{\Delta y' \quad /:\Delta t'}{\gamma(\Delta t' + \frac{u\Delta x'}{c^2}) \quad /:\Delta t'} = \frac{\frac{\Delta y'}{\Delta t'}}{\gamma(1 + \frac{u}{c^2}\frac{\Delta x'}{\Delta t'})} \quad \Longrightarrow \quad v_y = \frac{v_y'}{\gamma(1 + \frac{uv_x'}{c^2})}$$

$$v_z = \frac{\Delta z' \quad /:\Delta t'}{\gamma(\Delta t' + \frac{u\Delta x'}{c^2}) \quad /:\Delta t'} = \frac{\frac{\Delta z'}{\Delta t'}}{\gamma(1 + \frac{u}{c^2}\frac{\Delta x'}{\Delta t'})} \quad \Longrightarrow \quad v_z = \frac{v_z'}{\gamma(1 + \frac{uv_x'}{c^2})}$$

На основу првог принципа специјалне теорије релативности закључујемо да постоје и инверзне формуле, при чему морамо водити рачуна да се систем S у односу на систем S' креће брзином $-u$. Дакле, важиће:

$$v_x' = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}\,, \quad v_y' = \frac{v_y}{\gamma(1 - \frac{uv_x}{c^2})}\,, \quad v_z' = \frac{v_z}{\gamma(1 - \frac{uv_x}{c^2})}$$

Ако је брзина $u \ll c$, из ових формула добија се класични закон слагања брзина:

$$v_x' = v_x - u\,, \quad v_y' = v_y\,, \quad v_z' = v_z$$