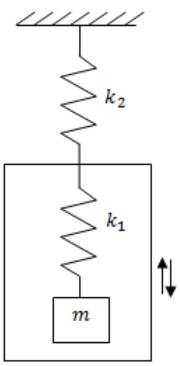
ОСЦИЛАЦИЈЕ

Максим Мичета

Слагање осцилација једнаких фреквенција

Уколико на осцилатор одједном дјелује више сила од којих би свака понаособ изазвазала осциловање тијела, тада би осцилаторно кретање тијела било сложено.



Посматрајмо сада тијело које је окачено о еластичну опругу која је закачена за квадратни рам. Рам је такође закачен о опругу.

Ако фиксирамо рам и изведемо тијело из равнотежног положаја, оно ће осциловати по закону $x_1 = x_{01}\sin(\omega_1 t + \varphi_{01})$.

Ако фиксирамо тијело унутар рама, и изведемо рам из равнотежног положаја, тијело (заједно са рамом) ће осциловати по закону

$$x_2 = x_{02}\sin(\omega_2 t + \varphi_{02}).$$

Ако изведемо и рам и тијело из равнотежног положаја осциловање тијела ће бити сложено. Резултујућа елонгација ће бити једнака збиру појединачних елонгација:

$$x = x_1 + x_2 = x_{01}\sin(\omega_1 t + \varphi_{01}) + x_{02}\sin(\omega_2 t + \varphi_{02})$$

Најједноставнији случај је када су угаоне фреквенције једнаке ($\omega_1 = \omega_2$):

$$x_1 = x_{01}\sin(\omega t + \varphi_{01})\,, x_2 = x_{02}\sin(\omega t + \varphi_{02})$$

Резултујуће осциловање је такође осцилаторно (што се лако доказује), па има облик:

$$x = x_0\sin(\omega t + \varphi_0)$$

гдје су x_0 и φ_0 амплитуда и почетна фаза резултујућег осциловања.

$$x_0\sin(\omega t + \varphi_0) = x_{01}\sin(\omega t + \varphi_{01}) + x_{02}\sin(\omega t + \varphi_{02})$$

Ова једнакост важи у сваком тренутку, па и у тренуцима:

$$\omega t = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 \sin\varphi_0 = x_{01}\sin\varphi_{01} + x_{02}\sin\varphi_{02} \qquad (1)$$

$$\omega t = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x_0 \cos\varphi_0 = x_{01}\cos\varphi_{01} + x_{02}\cos\varphi_{02} \qquad (2)$$

Дијељењем једначине (1) и једначине (2) добићемо:

$$\frac{x_0 \sin\varphi_0}{x_0 \cos\varphi_0} = \frac{x_{01}\sin\varphi_{01} + x_{02}\sin\varphi_{02}}{x_{01}\cos\varphi_{01} + x_{02}\cos\varphi_{02}}$$

$$\boxed{tg\,\varphi_0 = \frac{x_{01}\sin\varphi_{01} + x_{02}\sin\varphi_{02}}{x_{01}\cos\varphi_{01} + x_{02}\cos\varphi_{02}}}$$

Квадрирањем једначина (1) и (2) и њиховим сабирањем, добићемо:

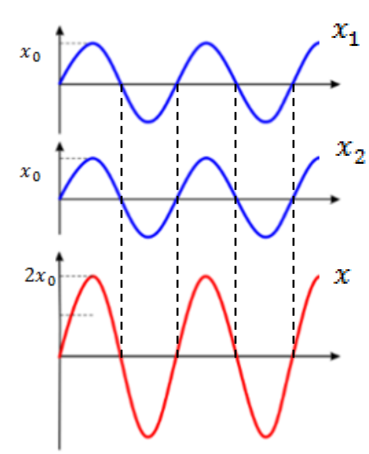
$$x_0^{\,2}\sin^2\varphi_0 + x_0^{\,2}\cos^2\varphi_0 = (x_{01}\sin\varphi_{01} + x_{02}\sin\varphi_{02})^2 + (x_{01}\cos\varphi_{01} + x_{02}\cos\varphi_{02})^2$$

$$x_0^{\,2}\overbrace{(\sin^2\varphi_0 + \cos^2\varphi_0)}^{1} = x_{01}^{\,2}\sin^2\varphi_{01} + 2x_{01}x_{02}\sin\varphi_{01}\sin\varphi_{02} + x_{02}^{\,2}\sin^2\varphi_{02} + x_{01}^{\,2}\cos^2\varphi_{01} + 2x_{01}x_{02}\cos\varphi_{01}\cos\varphi_{02} + x_{02}^{\,2}\cos^2\varphi_{02}$$

$$x_0^{\,2} = x_{01}^{\,2}(\sin^2\varphi_{01} + \cos^2\varphi_{01}) + x_{02}^{\,2}(\sin^2\varphi_{02} + \cos^2\varphi_{02}) + 2x_{01}x_{02}(\cos\varphi_{01}\cos\varphi_{02} + \sin\varphi_{01}\sin\varphi_{02})$$

$$\boxed{x_0^{\,2} = x_{01}^{\,2} + x_{02}^{\,2} + 2x_{01}x_{02}\cos(\varphi_{02} - \varphi_{01})}$$

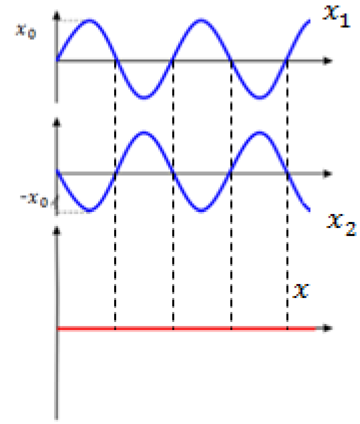
Постоје два специјална случаја:



1. Ако је разлика почетних фаза $\varphi_{02} - \varphi_{01} = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), кажемо да су осцилације у фази и тада је амплитуда резултујуће осцилације максимална:

$$x_0^{\,2} = x_{01}^{\,2} + x_{02}^{\,2} + 2x_{01}x_{02} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_0 = x_{01} + x_{02}}$$

2. Ако је разлика почетних фаза $\varphi_{02} - \varphi_{01} = (2k+1)\pi \ (k \in \mathbb{Z})$, кажемо да су осцилације у противфази и тада је амплитуда резултујуће осцилације минимална:



$$x_0{}^2 = x_{01}{}^2 + x_{02}{}^2 - 2x_{01}x_{02} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_0 = |x_{01} - x_{02}|}$$

*Напомена: На сликама је приказано слагање осцилација исте амплитуде.