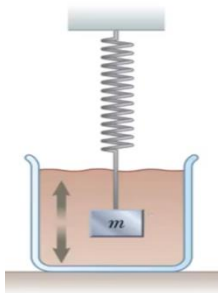


Пригушене и принудне осцилације

-Пригушене осцилације

Приликом идеалних хармонијских осцилација (нпр. математичко клатно), механичка енергија се одржава, односно амплитуда је константна.



Међутим, у реалном случају, механичка енергија осцилатора се смањује услед дејства отпора средине (претвара се у унутрашњу), па се смањује и амплитуда. Тијело ће успоравати све до заустављања, па се смањује и период осциловања. На тијело поред силе Земљине теже и силе еластичности, дјелује и сила отпора средине $F_{ot} = -\mu v$, (μ -коэффициент отпора средине) па је једначина кретања:

$$ma = -kx - \mu v$$

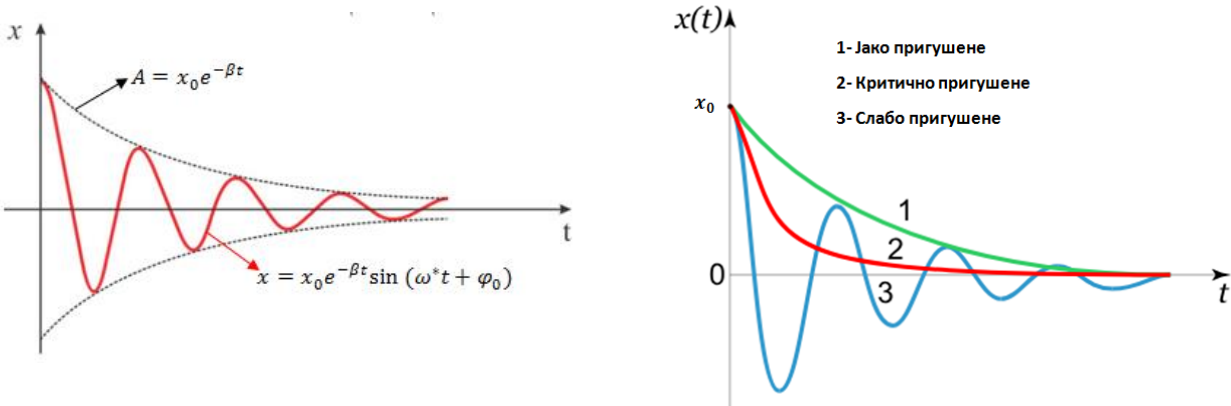
Ово је диференцијална једначина, па ћемо само навести њено коначно рјешење:

$$x = x_0 e^{-\beta t} \sin(\omega^* t + \varphi_0)$$

при чему је: $A = x_0 e^{-\beta t}$ амплитуда, $\beta = \frac{\mu}{2m}$ коэффициент пригушења, а ω^* угаона фреквенција пригушених осцилација.

$\omega^* = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, гдје је $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ сопствена угаона фреквенција (угаона фреквенција којом би тијело осциловало да нема пригушења).

Очито је да је услов за осциловање тијела $\omega_0^2 > \beta^2$, тј. $\mu^2 < 4kt$, односно да коэффициент отпора не буде превелики. Ако је $\omega_0^2 = \beta^2$, кажемо да је **пригушење критично** и тада осцилатор изведен из равнотежног положаја стиже до њега и ту се зауставља. Ово је некада и пожељно, нпр. код амортизера.



За описивање квалитета осцилатора користи се **фактор добротe** Q , који је једнак односу максималне еластичне силе и максималне силе отпора:

$$\left. \begin{aligned} Q &= \frac{F_{elmax}}{F_{otmax}} = \frac{kx_0}{\mu v_0} \\ v_0 &= \omega_0 x_0 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} Q &= \frac{kx_0}{\mu \omega_0 x_0} = \frac{k}{\mu \omega_0} \\ \omega_0 &= \sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned} \right\} \boxed{Q = \frac{1}{\mu} \sqrt{mk}}$$

Квалитет осцилатора се може описати и помоћу **логаритамског декремента** δ :

$$\boxed{\delta = \ln \frac{x_{01}}{x_{02}}}$$

-Принудне осцилације



Видјели смо да су реалне слободне осцилације увијек пригушено. При томе се смањује механичка енергија осцилатора, као и амплитуда. То је некад пожељено (нпр. амортизери), међутим често није (часовник). Тада је неопходно надокнадити губитак механичке енергије и то се остварује дјеловањем спољашње силе. Та сила се назива **принудна**, а саме осцилације **принудне**. Дјеловање **принудне силе** је такође периодично: $F = F_0 \sin \omega t$ (ω је угаона фреквенција силе, а F_0 њена амплитуда).

При томе је једначина кретања: $ma = F_0 \sin \omega t - kx - \mu v$.

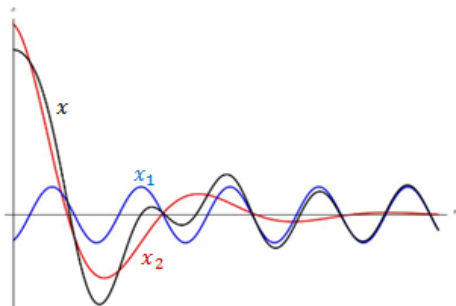
Ово је диференцијална једначина, па ћемо навести само њено рјешење:

$$x = x_0 \sin(\omega t - \varphi) + Ae^{-\beta t} \sin(\omega_1 t + \theta)$$

Принудна x_1

Пригушена x_2

Дакле, ова осцилација је добијена слагањем двије осцилације: пригушене и принудне.



Видимо да се осцилација x_2 последије неког времена пригуши, па осцилатор осцилује само под дејством принудне силе, $x = x_1$.

Тада кажемо да су успостављене стационарне (принудне) осцилације. Рјешавањем једначине кретања може се добити амплитуда:

$$x_0 = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

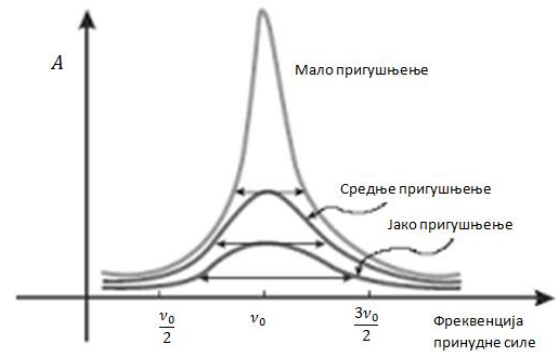
Амплитуда зависи од фреквенције принудне силе и од степена пригушења. Што је степен пригушења мањи, то је амплитуда већа. Ако је степен пригушења јако мали, тада је амплитуда:

$$x_0 = \frac{F_0}{m|\omega_0^2 - \omega^2|}$$

ОСИЛАЦИЈЕ

Максим Мичета

Механичка резонанција је појава која се дешава када се изједначе угаона фреквенција принудне силе и сопствена угаона фреквенција и тада је амплитуда максимална.



Ако постоји одређено пригушење, онда резонантна фреквенција принудне силе није једнака сопственој фреквенцији већ је мало нижа. То можемо доказати- нађимо минимум израза који се налази у имениоцу формуле за амплитуду принудних осцилација:

$$f(\omega^2) = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2 = \omega^4 + \omega^2(4\beta^2 - 2\omega_0^2) + \omega_0^4$$

Ова функција има минимум у тјемени:

$$\omega_{rez}^2 = -\frac{b}{2a} = \frac{2\omega_0^2 - 4\beta^2}{2} = \omega_0^2 - 2\beta^2$$

$$\omega_{rez} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$